ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010
Môn thi : TOÁN

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1), m là số thực

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.
2. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện : $x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 < 4$

Câu II (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$
2.. Giải bất phương trình : $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1$

Câu III (1,0 điểm) . Tính tích phân : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$

Câu IV (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Câu V (1,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$ (x, y $\in$ R).

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a ***(2,0 điểm)***

1. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* , cho hai đường thẳng d_1: $\sqrt{3}x+y=0$ và d_2: $\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.
2. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P) : x − 2y + z = 0. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết MC = $\sqrt{6}$.

Câu VII.a ***(1,0 điểm).*** Tìm phần ảo của số phức z, biết $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b ***(2,0 điểm)***

1. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh *A*(6; 6), đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh *AB* và *AC* có phương trình *x* + *y* − 4 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh *B* và *C*, biết điểm E(1; −3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh *C* của tam giác đã cho.
2. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho điểm *A*(0; 0; −2) và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ *A* đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm *A*, cắt Δ tại hai điểm *B* và *C* sao cho *BC* = 8.

Câu VII.b (1 điểm).

Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z} = \dfrac{(1-\sqrt{3}i)^2}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\overline{z} + iz$

BÀI GIẢI

Câu I: 1) m= 1, hàm số thành : y = $x^3 - 2x^2 + 1$.

Tập xác định là R. y' = $3x^2 - 4x$; y' = 0 ⇔ x = 0 hay x = $\dfrac{4}{3}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

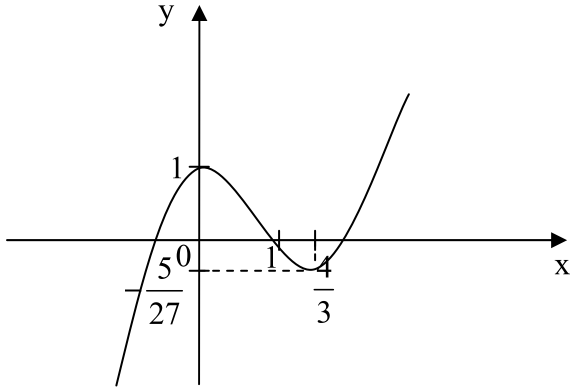
x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	1 CĐ	↘	$-\frac{5}{27}$ CT	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$; $(\frac{4}{3}; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên $(0; \frac{4}{3})$

Hàm số đạt cực đại tại x = 0; y(0) = 1; hàm số đạt cực tiểu tại x=$\frac{4}{3}$; y($\frac{4}{3}$) = $-\frac{5}{27}$

y" = $6x - 4$; y" = 0 ⇔ x = $\frac{2}{3}$. Điểm uốn I ($\frac{2}{3}$; $\frac{11}{27}$)

<u>Đồ thị</u> :



2. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và trục hoành là :

$x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - m) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hay $g(x) = x^2 - x - m = 0$ (2)

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (2). Với điều kiện 1 + 4m > 0 ta có :

$x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = -m$. Do đó yêu cầu bài toán tương đương với:

$$\begin{cases} 1+4m>0 \\ g(1) = -m \neq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ -m \neq 0 \\ (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \\ 1+2m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Câu II: 1. Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và tanx ≠ - 1

PT ⇔ $\dfrac{(1+\sin x + \cos 2x).(\sin x + \cos x)}{1+\tan x} = \cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x).(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\cos x=\cos x$$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x+\cos 2x)=1 \Leftrightarrow \sin x+\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=1 (loai) \quad hay \ \sin x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \ hay \ \ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

2. Điều kiện $x \ge 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{x-\sqrt{x}-1+\sqrt{2(x^2-x+1)}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \ge 0$

▪ Mẫu số < 0 $\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)}>1 \Leftrightarrow 2x^2-2x+1>0$ (hiển nhiên)

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-1+\sqrt{2(x^2-x+1)} \le 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)} \le -x+\sqrt{x}+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+\sqrt{x}+1\ge 0 \\ (x-1)^2+2\sqrt{x}(x-1)+x\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+\sqrt{x}+1\ge 0 \\ (x-1+\sqrt{x})^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x=(1-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

<u>Cách khác</u> :

Điều kiện $x \ge 0$

Nhận xét : $1-\sqrt{2(x^2-x+1)}=1-\sqrt{2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}\le 1-\sqrt{\frac{3}{2}}<0$

(1) $\Leftrightarrow x-\sqrt{x}\le 1-\sqrt{2(x^2-x+1)}$

* x = 0 không thoả.

* x > 0 : (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x}-1\le \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)}\le \frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}+1$$

Đặt $t=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\Rightarrow \dfrac{1}{x}+x=t^2+2$

(1) thành : $\sqrt{2(t^2+1)}\le t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ 2t^2+2\le t^2+2t+1 \ (*) \end{cases}$

(*) $t^2-2t+1\le 0 \Leftrightarrow (t-1)^2\le 0 \Leftrightarrow t=1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} (loai) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Câu III.

$I = \int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x}dx$ **;** $I_1 = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3};$

$I_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+2e^x)}{1+2e^x} = \left.\frac{1}{2}\ln(1+2e^x)\right|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2e}{3}\right)$

Vậy I = $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2e}{3}\right)$

Câu IV:

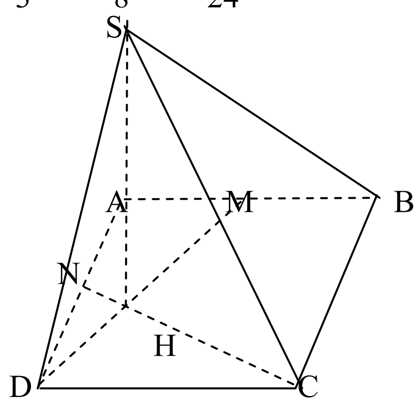
S(NDCM)= $a^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{a}{2}a = \frac{5a^2}{8}$ (đvdt) $\Rightarrow$ V(S.NDCM)= $\frac{1}{3}a\sqrt{3}\frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$ (đvtt)

$NC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$,

Ta có 2 tam giác vuông AMD và NDC bằng nhau

Nên $\widehat{NCD} = \widehat{ADM}$ vậy DM vuông NC

Vậy Ta có: $DC^2 = HC.NC \Rightarrow HC = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$



Ta có tam giác SHC vuông tại H, và khỏang cách của DM và SC chính là chiều cao h vẽ từ H trong tam giác SHC

Nên $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow h = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

Câu V : ĐK : $x \le \frac{3}{4}$. Đặt u = 2x; $v = \sqrt{5-2y}$

Pt (1) trở thành $u(u^2 + 1) = v(v^2 + 1) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow u = v$

Nghĩa là : $2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases}$

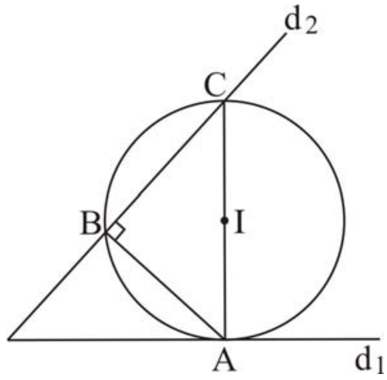
Pt (2) trở thành $\frac{25}{4} - 6x^2 + 4x^4 + 2\sqrt{3-4x} = 7$ (*)

Xét hàm số $f(x) = 4x^4 - 6x^2 + \frac{25}{4} + 2\sqrt{3-4x}$ trên $\left[0; \frac{3}{4}\right]$

$f'(x) = 4x(4x^2-3) - \frac{4}{\sqrt{3x-4}} < 0$

Mặt khác : $f\left(\frac{1}{2}\right)=7$ nên (*) có nghiệm duy nhất x = $\frac{1}{2}$ và y = 2.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất x = $\frac{1}{2}$ và y = 2



A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a:

1. $A \in d_1 \Rightarrow A\,(a; -a\sqrt{3})$ (a>0)
   Pt AC qua A $\perp d_1$: $x-\sqrt{3}y-4a=0$
   $AC \cap d_2 = C(-2a; -2\sqrt{3}a)$
   Pt AB qua A $\perp d_2$: $x+\sqrt{3}y+2a=0$
   $AB \cap d_2 = B\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$
   $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow BA.BC=\sqrt{3} \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right)$; $C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right)$
   $\Rightarrow Tâm\ I\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}};-\frac{3}{2}\right)$; $\mathbb{R}=IA=1 \Rightarrow Pt(T):\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$
2. C (1 + 2t; t; –2 – t) $\in \Delta$
   C $\in$ (P) $\Rightarrow$ (1 + 2t) – 2t – 2 – t = 0 $\Rightarrow$ t = –1 $\Rightarrow$ C (–1; –1; –1)
   M (1 + 2t; t; –2 – t)
   $MC^2 = 6 \Leftrightarrow (2t+2)^2 + (t+1)^2 + (-t-1)^2 = 6 \Leftrightarrow 6(t+1)^2 = 6 \Leftrightarrow t+1=\pm 1$
   $\Leftrightarrow$ t = 0 hay t = –2
   Vậy M_1 (1; 0; –2); M_2 (–3; –2; 0)
   d (M_1, (P)) = $\frac{|1-0-2|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$; d (M_2, (P)) = $\frac{|-3+4+0|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$

Câu VII.a: $\bar{z}=(\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i) = (1+2\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = (5+\sqrt{2}i)$

$\Leftrightarrow z = 5-\sqrt{2}i \Rightarrow$ Phần ảo của số phức z là $-\sqrt{2}$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b :

1. Phương trình đường cao AH : 1(x – 6) – 1(y – 6) = 0 $\Leftrightarrow$ x – y = 0
   Gọi K là giao điểm của IJ và AH (với IJ : x + y – 4 = 0), suy ra K là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow$ K (2; 2)
   K là trung điểm của AH $\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2x_K - x_A = 4-6=-2 \\ y_H = 2y_K - y_A = 4-6=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$ H (-2; -2)
   Phương trình BC : 1(x + 2) + 1(y + 2) = 0 $\Leftrightarrow$ x + y + 4 = 0
   Gọi B (b; -b – 4) $\in$ BC
   Do H là trung điểm của BC $\Rightarrow$ C (-4 – b; b); E (1; -3)
   Ta có : $\overrightarrow{CE}=(5+b;-b-3)$ vuông góc với $\overrightarrow{BA}=(6-b;b+10)$
   $\Rightarrow$ (5 + b)(6 – b) + (-b – 3)(b + 10) = 0
   $\Rightarrow 2b^2 + 12b = 0 \Rightarrow$ b = 0 hay b = -6
   Vậy B_1 (0; -4); C_1 (-4; 0) hay B_2 (-6; 2); C_2 (2; -6)
2. Δ qua M (-2; 2; -3), VTCP $\vec{a}=(2;3;2)$; $\overrightarrow{AM}=(-2;2;-1)$

$$\Rightarrow \vec{a} \wedge \overrightarrow{AM} = (-7;-2;10) \Rightarrow d(A, \Delta) = \frac{\left|\vec{a} \wedge \overrightarrow{AM}\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\sqrt{49+4+100}}{\sqrt{4+9+4}} = \sqrt{\frac{153}{17}} = 3$$

Vẽ BH vuông góc với Δ

Ta có : $BH = \frac{BC}{2} = 4$. $\Delta AHB \Rightarrow R^2 = 16 + \frac{153}{17} = \frac{425}{17} = 25$

Phương trình (S) : $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$

Câu VII.b: $\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. $(1-\sqrt{3}i) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$

$$\Rightarrow (1-\sqrt{3}i)^3 = 8\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = -8 \Rightarrow \bar{z} = \frac{-8}{1-i} = \frac{-8(1+i)}{2} = -4-4i$$

$$\Rightarrow \bar{z} + iz = -4-4i + i(-4+4i) = -8(1+i) \Rightarrow \left|\bar{z} + iz\right| = 8\sqrt{2}.$$

Lưu Nam Phát

(Trung tâm BDVH và LTĐH Vĩnh Viễn)